Национальная научно-образовательная корпорация ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Дисциплина: «Математический анализ»

Расчетно-графическая работа на тему: «Предел»

Вариант: 6

Работу выполняли:

Студент: *Казаев Максим из группы Р3111*

Студент: *Рубин Михаил из группы Р3111*

Студент: *Шпак Всеволод из группы Р3109*

Студент: *Коваленко Илья из группы Р3123*

Студент: *Романенко Михаил из группы Р3111*

Преподаватель: *Правдин Константин Владимирович*

Ментор: *Кузьмина Анастасия Дмитриевна*

Санкт-Петербург, 2022

# Задание 1

Пользуясь методом математической индукции, докажите, что при любом n ∈ :

1) Ознакомьтесь с методом математической индукции. Например, в задачнике:

Кудрявцев Л. Д. и др. «Сборник задач по математическому анализу» Том 1 (2003).

2) Проверьте утверждение для номеров (база индукции).

3) Предположите, что утверждение верно (индукционное предположение).

4) Покажите, что из справедливости индукционного предположения для номера следует

справедливость этого утверждения для номера (шаг индукции).

5) Сделайте вывод.

Выполнение:

База индукции:

Пусть утверждение верно при :

Проверим утверждение при :

Утверждение доказано.

Вывод: была доказана математическая формула, пользуясь тем, что была доказана база индукции, а так как из справедливости индукционного предположения для номера следует справедливость этого утверждения для номера , значит утверждение верно для любого номера .

# Задание 2

Вещественная последовательность задана рекуррентно: = , где ∈ R. Исследуйте её предел при в зависимости от значения .

План:

1) Предположите, что предел существует, и найдите его. Доказательство существования предела будет проведено в п. 6).

2) Какими могут быть значения x1? Укажите множество возможных значений x1. Докажите ваш ответ аналитически.

3) При каком значении x1 последовательность является стационарной? Докажите это аналитически.

4) Познакомьтесь с теоремой Вейерштрасса об ограниченной монотонной

последовательности и запишите её формулировку (например, в учебнике:

Зорич В.А. "Математический анализ" Том 1 (2019): глава III, п. 3. "Вопросы существования

предела").

5) Выделите характерные случаи для значений x1 (с точки зрения монотонности) и проиллюстрируйте их графиками последовательности.

6) Докажите аналитически ограниченность и монотонность последовательности для каждого характерного случая. Сделайте заключение о существовании предела по теореме Вейерштрасса.

Выполнение:

1)

Предположим, что . Тогда .

Получаем , откуда .

2)

3)

Последовательность стационарная, значит

.

4)

Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности утверждает, что любая ограниченная возрастающая (убывающая) последовательность имеет предел, причем этот предел равен ее точной верхней (нижней) грани.

5)

:

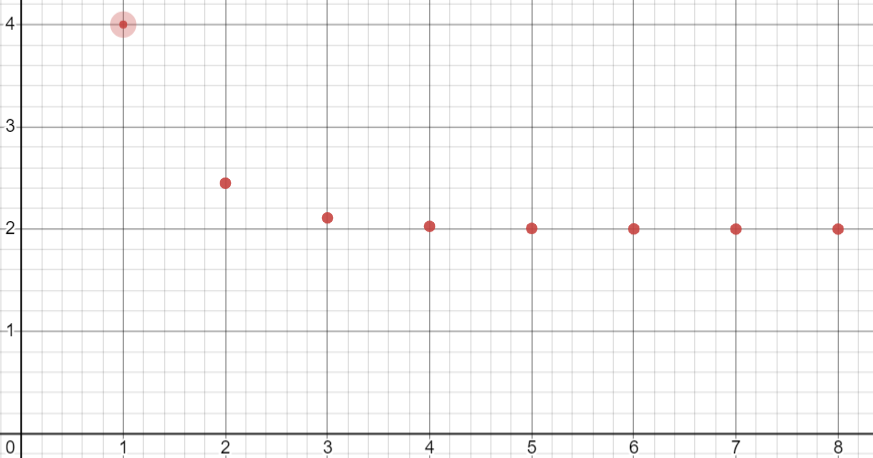


Рисунок - график последовательности при x1>2

:

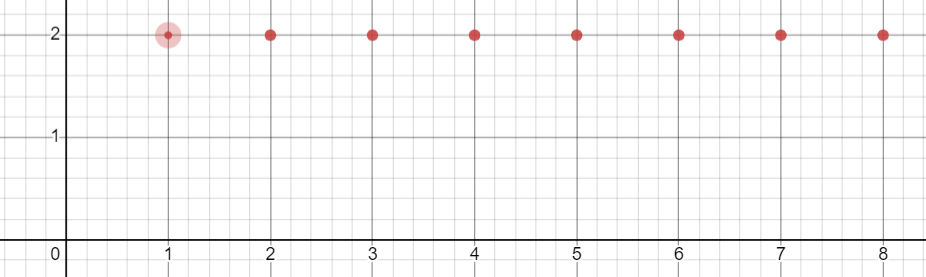


Рисунок - график последовательности при x1=2

:

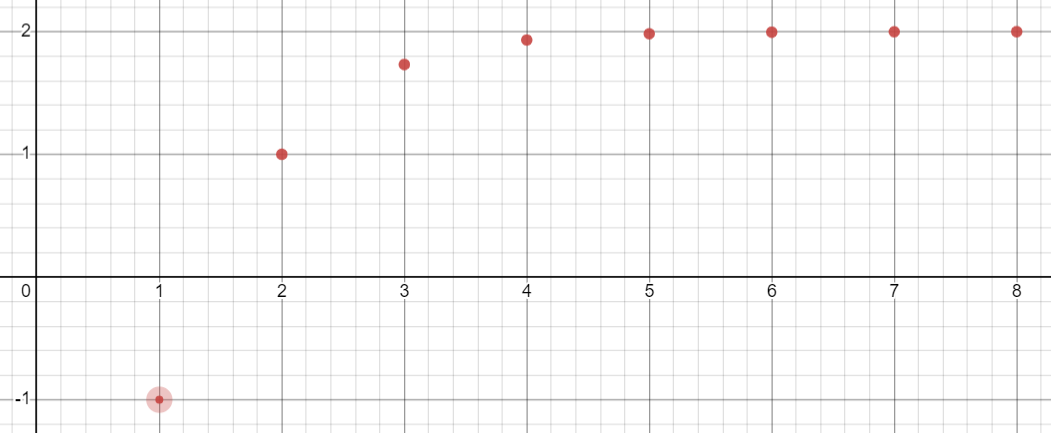


Рисунок - график последовательности при x1<2

6)

Найдем, при каких значениях последовательность невозрастающая:

Если элемент , то начиная с него последовательность невозрастающая, значит вся последовательность невозрастающая при .

Если , то , значит последовательность ограничена снизу.

Вывод: по теореме Вейерштрасса последовательность имеет предел, равный 2 при .

Найдем, при каких значениях последовательность неубывающая:

Если элемент, то начиная с него последовательность неубывающая, значит вся последовательность неубывающая при.

Если , то , значит последовательность ограничена сверху.

Вывод: по теореме Вейерштрасса последовательность имеет предел, равный 2 при .

Получаем: при .

# Задание 3

Какой порядок будет иметь приращение объема конуса по отношению

к бесконечно малому приращению радиуса его основания?

План:

1) Сделайте геометрическую иллюстрацию к задаче.

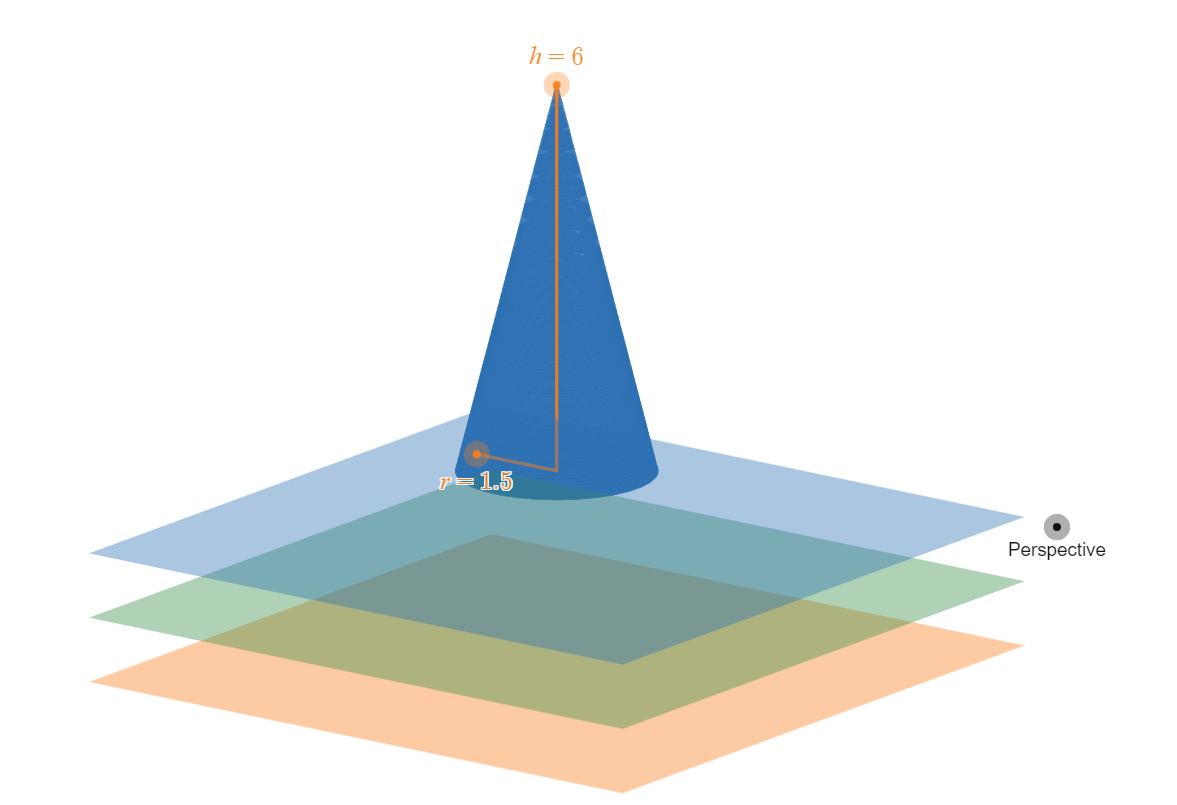
2) Составьте математическую модель: введите обозначения, составьте формулу.

3) Решите задачу аналитически.

4) Запишите ответ и проиллюстрируйте его геометрически.

Выполнение:

1) Иллюстрация к задаче:



2)

r- начальный радиус

r’ - приращение

**△**V - приращение объёма

3) **△**V = − = − =

=

≠ 0 и ≠ ∞ =>

=> они одного порядка

4) Приращение объема конуса и бесконечно малое приращение радиуса его основания имеют одинаковый порядок

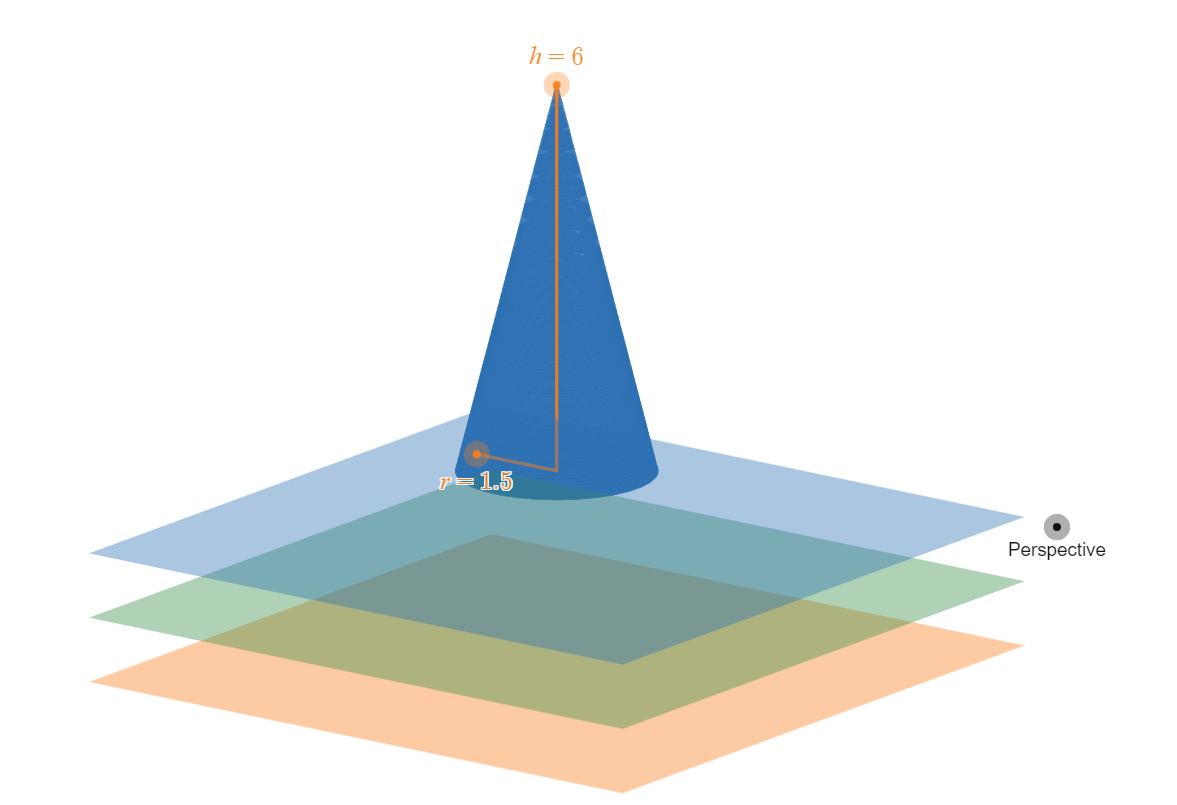


Рисунок -исходный конус

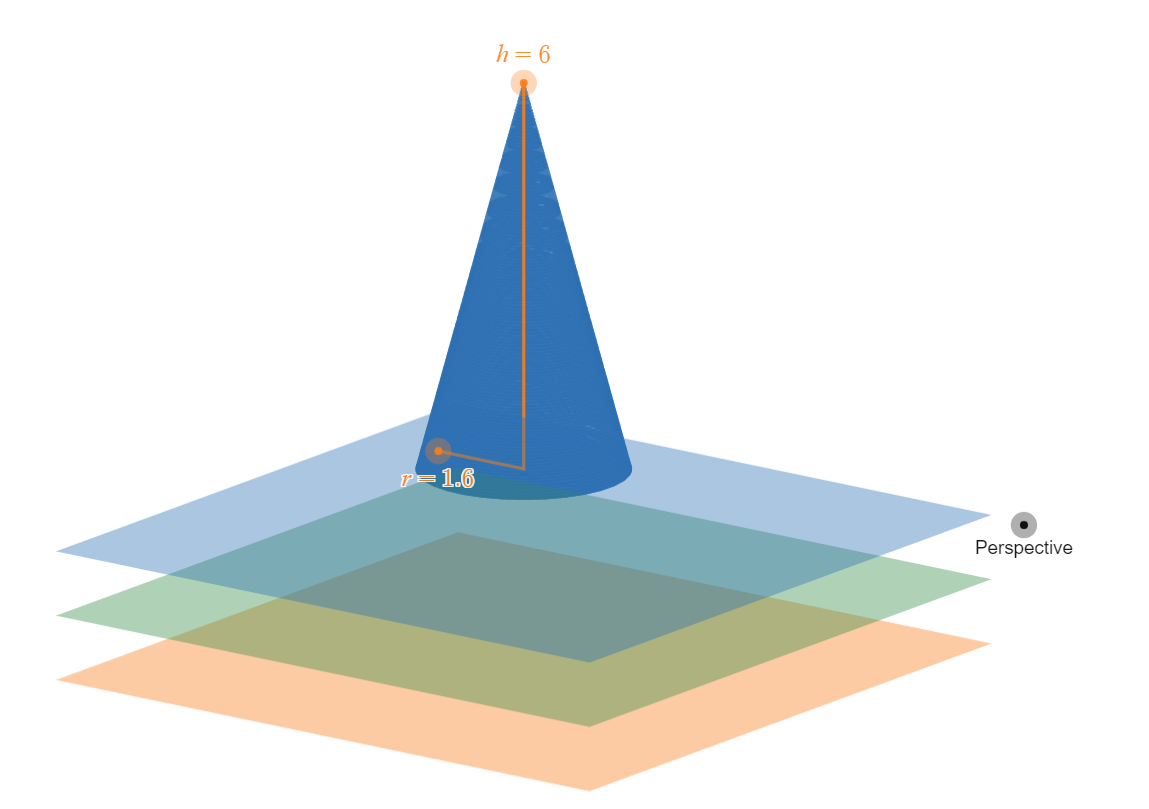


Рисунок -конус с малым приращением радиуса основания

# Задание 4

Вычислите длину окружности как предел периметра вписанного многоугольника, полученного удвоением числа сторон вписанного правильного шестиугольника.

План:

1) Сделайте геометрическую иллюстрацию к задаче.

2) Составьте математическую модель: введите обозначения, составьте формулу.

3) Решите задачу аналитически.

4) Запишите ответ и проиллюстрируйте его геометрически.

Выполнение:

1. Иллюстрация к задаче:

1. R – радиус описанной окружности, n-количество сторон

Формула вычисления периметра вписанного n-угольника:

1. Вычислим предел при n→∞:
2. Длина окружности, как предел периметра вписанного в нее n-угольника при n→∞, равна .

Иллюстрация при n→∞, где n-число сторон вписанного многоугольника:

вписанный 6-угольник вписанный 12-угольник окружность

# Задание 5

Даны последовательность и функция f(x). Исследуйте поведение предложенных величин.

План для :

1) Вычислите предел последовательности при n → ∞.

2) Постройте график общего члена последовательности в зависимости от номера n.

3) Проиллюстрируйте сходимость (расходимость) последовательности:

3a) вспомните определение сходимости (расходимости) последовательности;

3б) выберите три различных положительных числа ε1> ε2> ε3;

3в) для каждого такого числа изобразите на графике ε -окрестность («ε -трубу»)

3г) найдите на графике номер , после которого все члены последовательности попадают в ε -окрестность, или установите, что такого номера нет.

Выполнение для :

1)

= =

= = = 3

2)

Изображение выглядит как текст, седзи

Автоматически созданное описание

Рисунок 6 – график последовательности an

*3)*

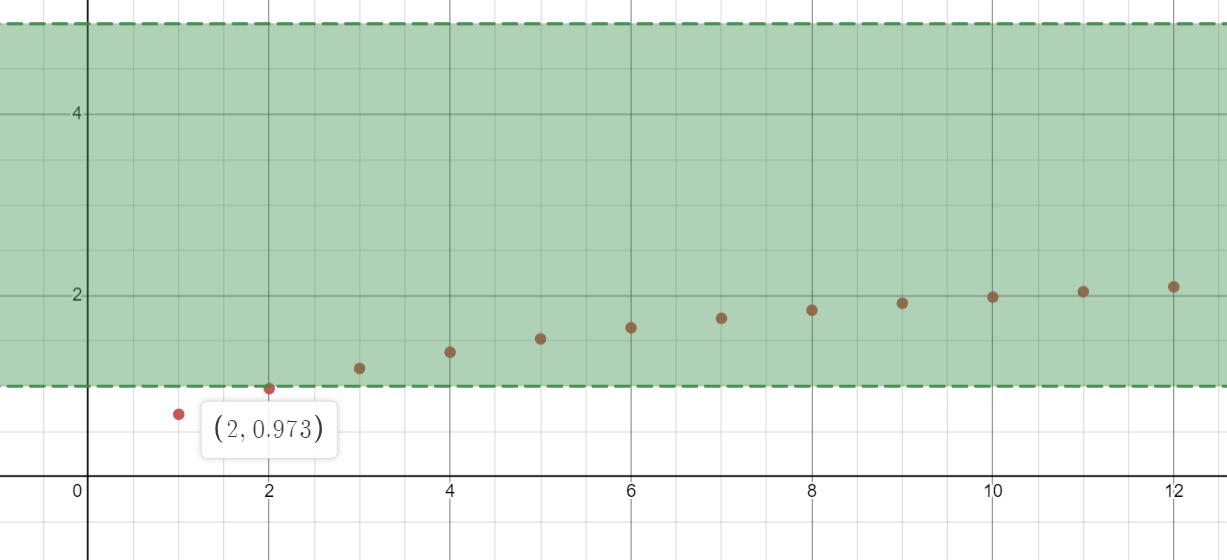


Рисунок 7 – ε-окрестность для ε=2

По графику видим, что после n0 = 2 все члены последовательности попадают в ε-окрестность.

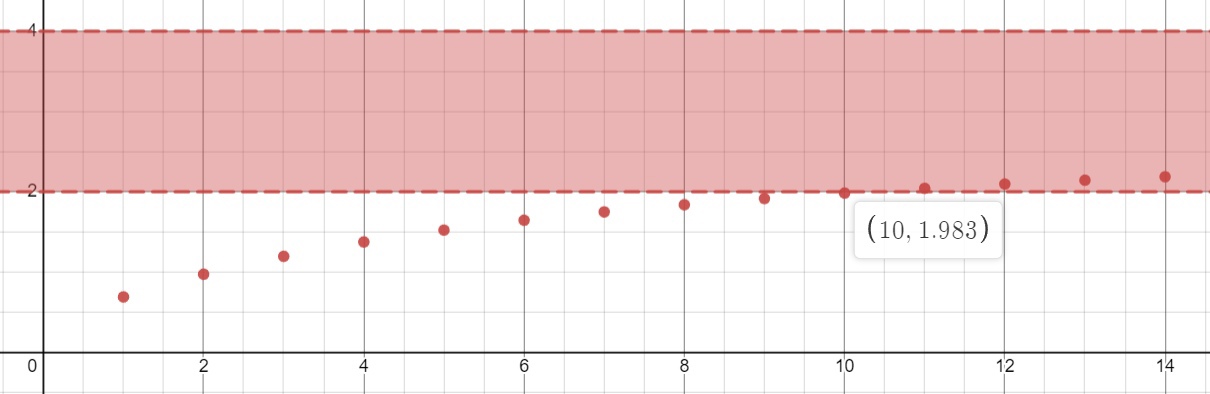


Рисунок 8 – ε-окрестность для ε=1

По графику видим, что после n0 = 10 все члены последовательности попадают в ε-окрестность.

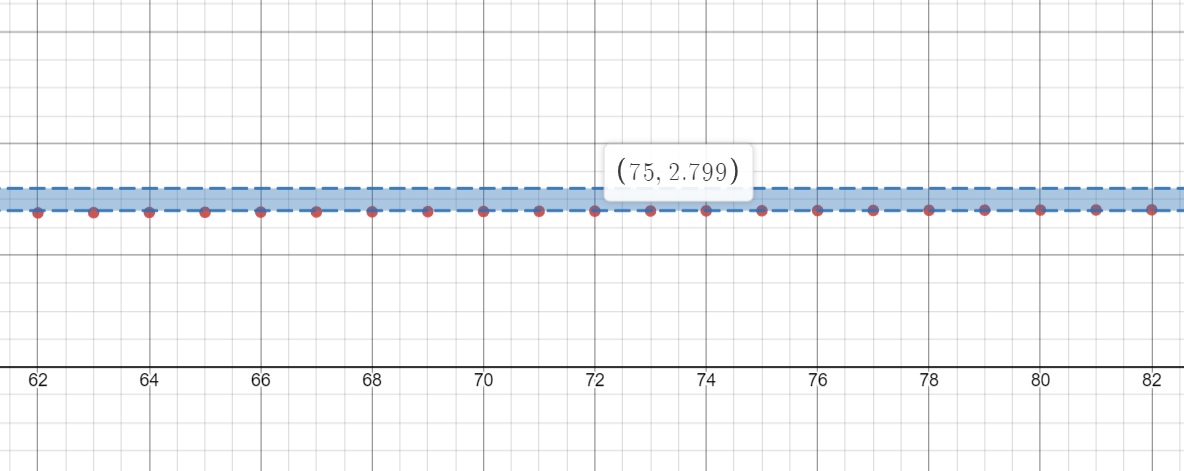


Рисунок 9 – ε-окрестность для ε=0.2

По графику видим, что после n0 = 75 все члены последовательности попадают в ε-окрестность.

План для f(x):

1) Вычислите предел функции при x → ∞.

2) Постройте график функции в зависимости от x.

3) Проиллюстрируйте сходимость (расходимость) функции на бесконечности:

3a) вспомните определение сходимости (расходимости) п) функции на бесконечности;

3б) выберите три различных положительных числа ε1> ε2> ε3;

3в) для каждого такого числа изобразите на графике ε -окрестность («ε -трубу»)

3г) найдите на графике δ-окрестность переменных x, в которой все значения функции f(x) попадают в ε -окрестность, или установите, что такой окрестности нет.

Выполнение для f(x):

f(x) =

1)

Вычисление предела при :

=

= +

Вычисление предела при :

=

= 0

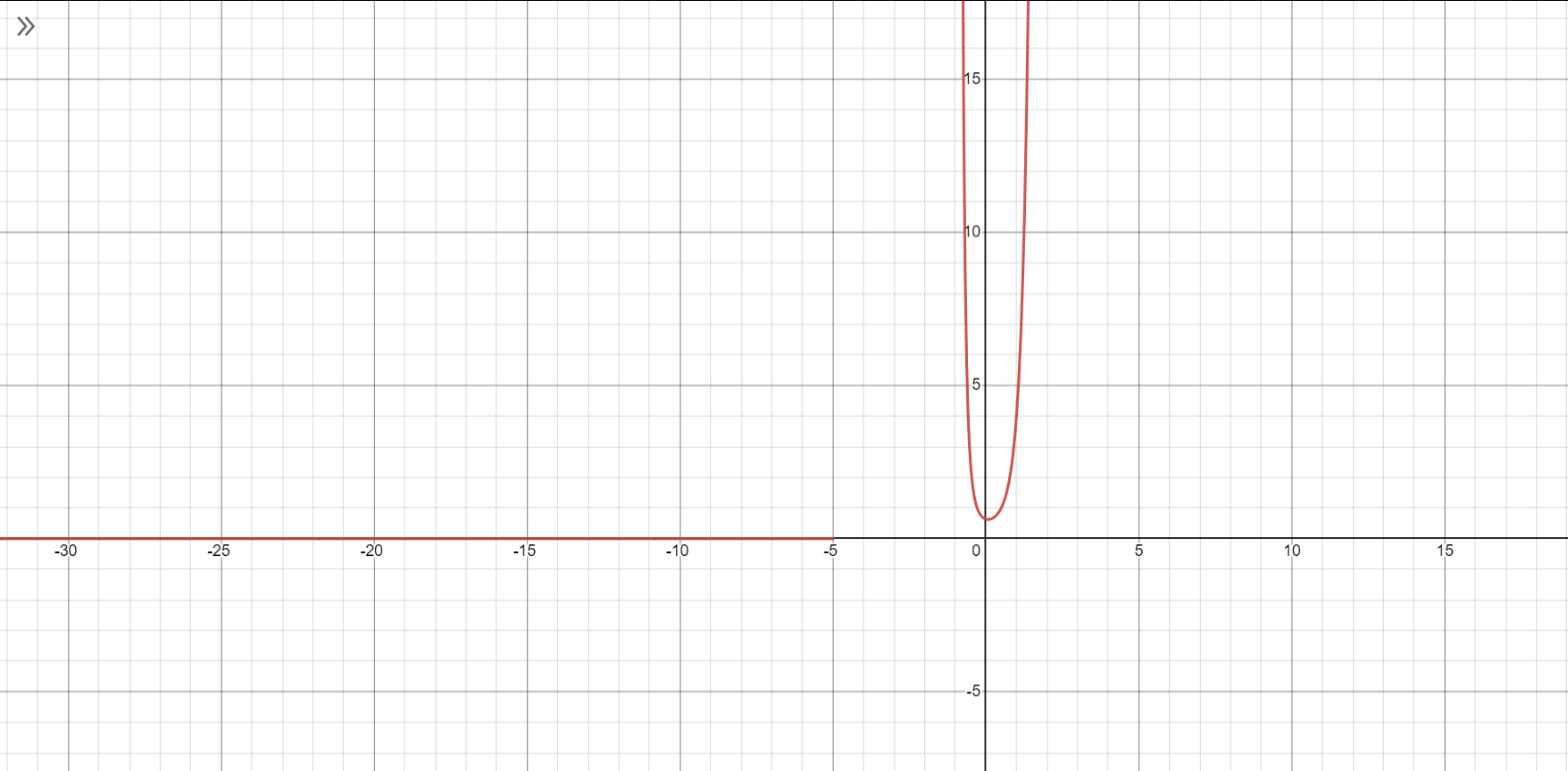
2) График функции в зависимости от x:

Рисунок 10 - график функции f(x)

3)

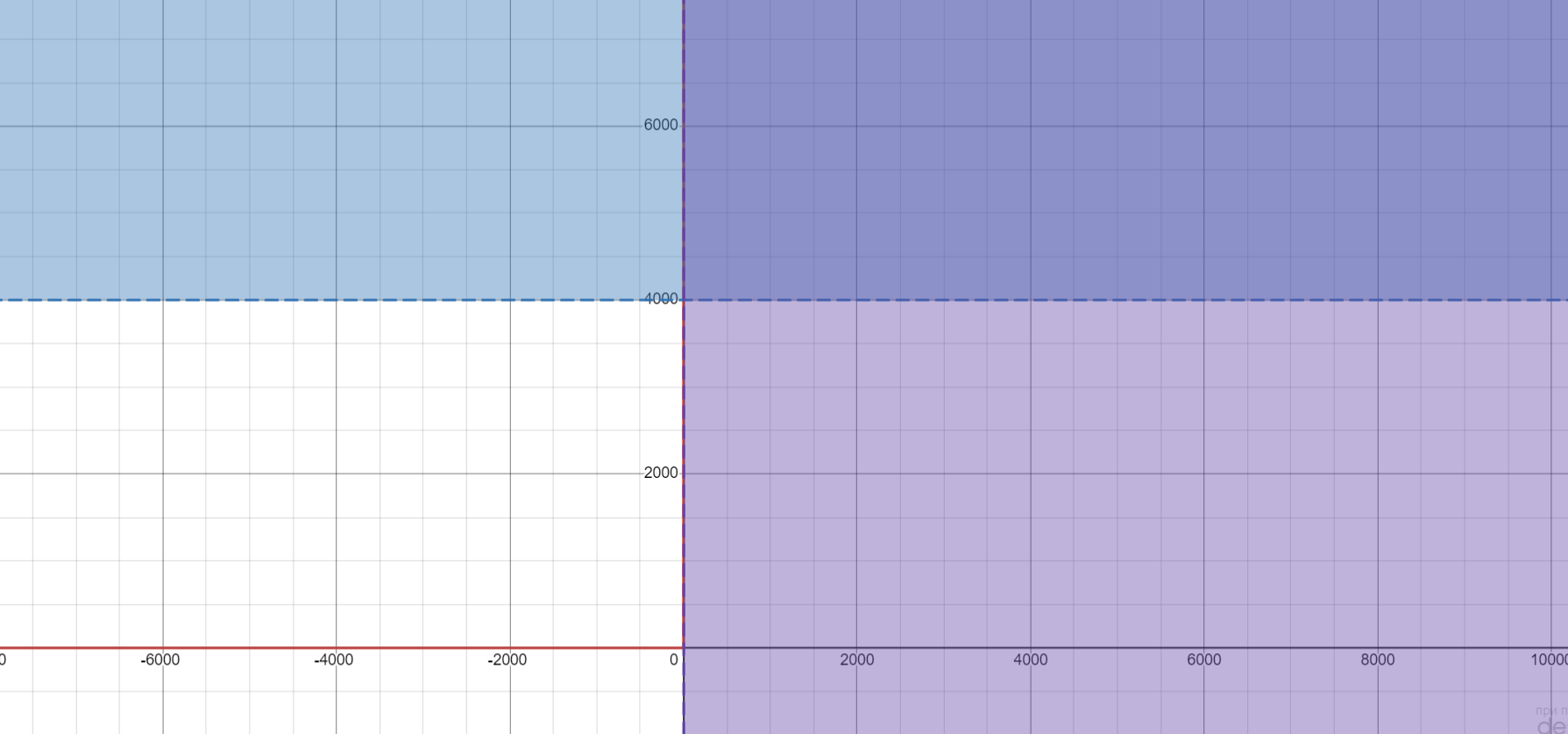


Рисунок 11 - ε-окрестность для ε=4000

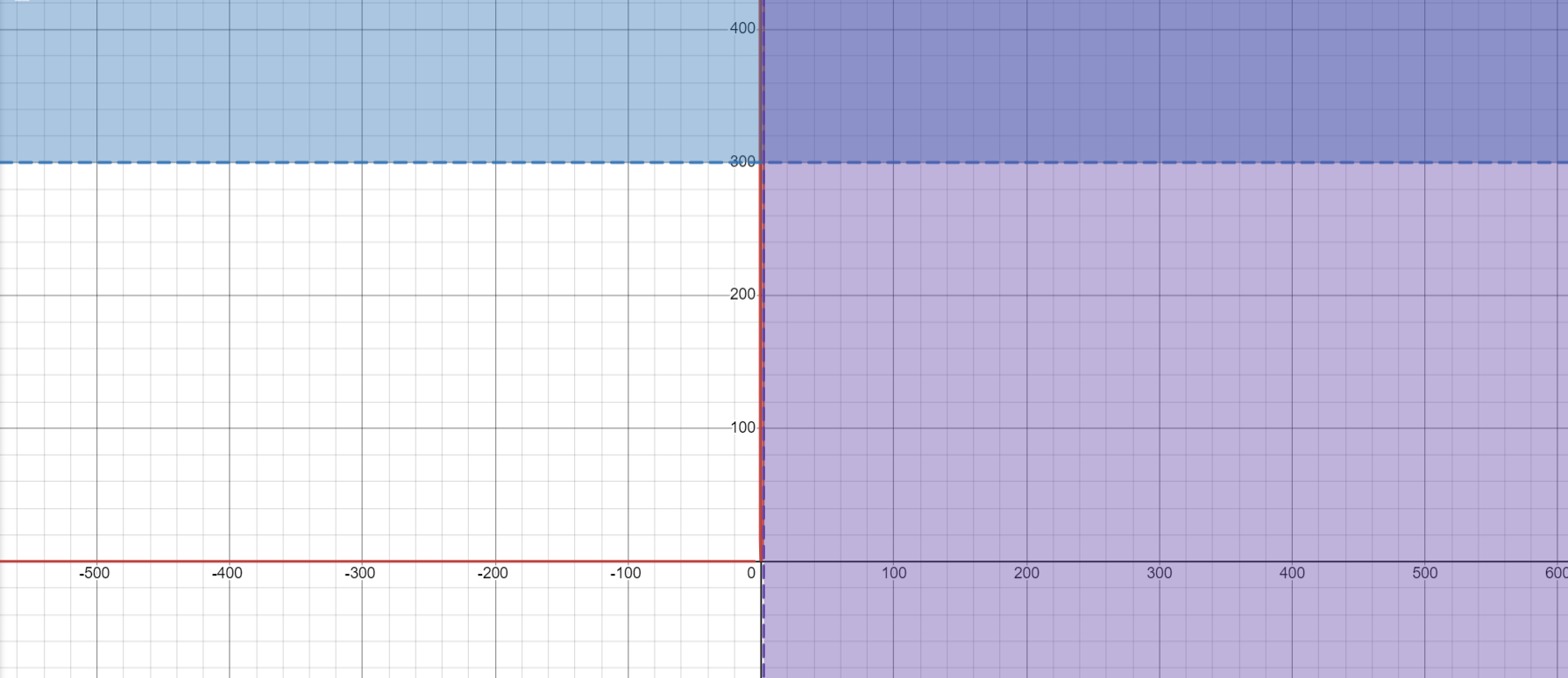


Рисунок 12 - ε-окрестность для ε=300

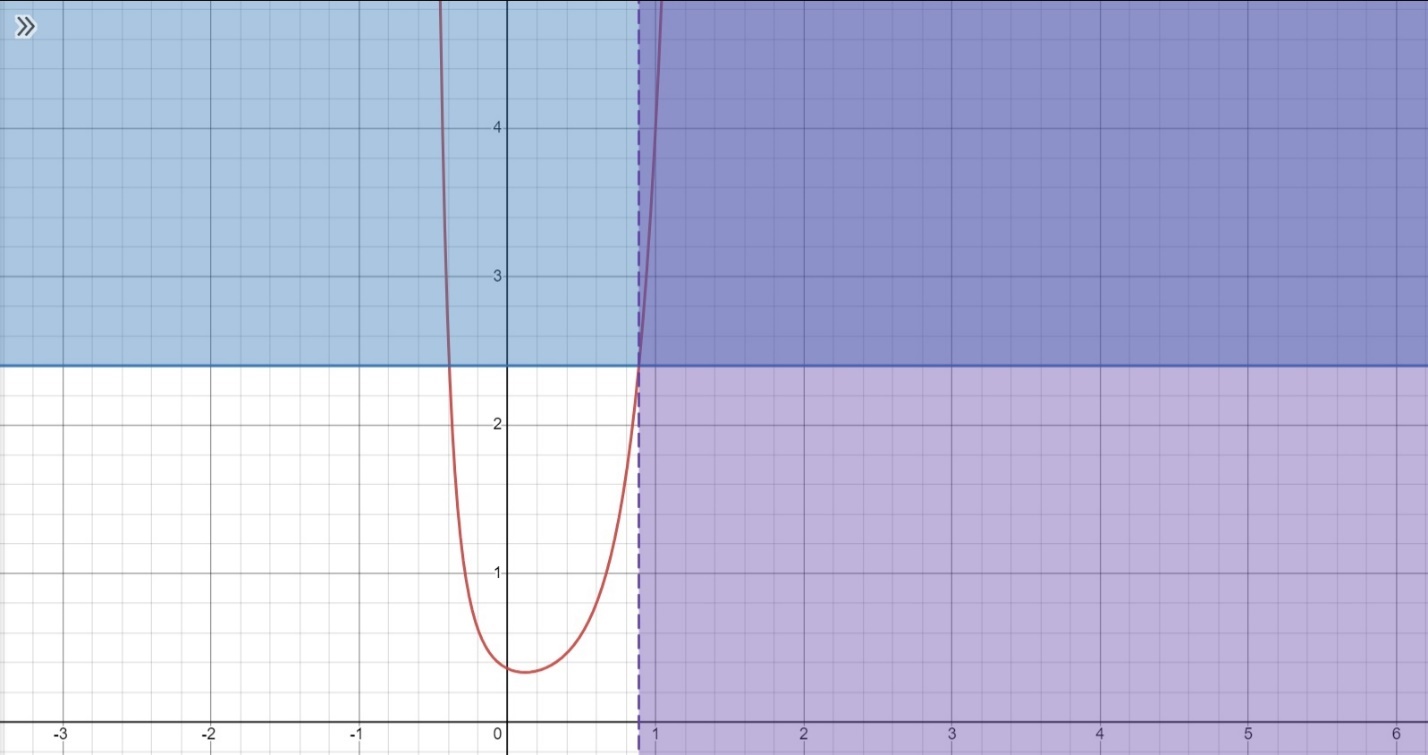


Рисунок 13 - ε-окрестность для ε=2.4

δ-окрестность на графиках отмечена фиолетовым цветом.

Вывод: предел данной функции равен бесконечности, функция расходящаяся.

Оценочный лист:

Казаев Максим – 100%

Михаил Рубин – 100%

Всеволод Шпак – 100%

Илья Коваленко – 100%

Михаил Романенко – 100%